1190. Deuring ノ論文ニツイテノ注意

中山 正　東屋五郎(阪)

M. Deuring ノ論文 Arithmetische Theorie der Korrespondenzen algebraischer Funktionenkörper I′ (Crelle. 177) デ大シタコトデハアリマセンガ、一寸証明ノ間違ッテヰル所ガアリマスノデ、ソレニツイテ注意シ、序デニ一二証明ガ非常ニ略サレテヰル様ニ見エル点モ補ッテ見タイト思ヒマス。

1. K^* ハ代数的閉体 k ノ上ノ一変数ノ代数函数体 K_1, K_2 ハ K^* ニ含マレテ、而モ K^* ヲ Kompositum トスル。k ノ上ノ代数函数体トスル。

上記論文 165 頁ノ Hilfssatz 3. ノ證明ノタメニハ Lemma トシテ、

K^*/k ノ任意ノ Primdivisor $\mathfrak{p}^*$ ガ K_1, K_2 ニ於テ引起ス Primdivisor ヲ夫々 $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$ トスルトキ、有限個ノ $\mathfrak{p}^*$ ヲ除イテ

(1)　$$\mathfrak{p}^* = (\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2)$$

ナルコトヲイヘバヨイノデ、コレガ次頁 6 行目ニ除カレルべキ $\mathfrak{p}^*$ ヲモ示シテアリマスガ、ソレ丈ケノ條件ナラ足リナイヤウニ思ハレマス。次ニkニ

角上ノ Lemma ヲ証明シテミマス。

165頁ニアルヤウニ $K^*|K_1$ ヲ separabel. n 次トシ、K_2 ノ元 $w_i\ (i=1,2,\cdots\cdots,n)$ ヲ $K^*|K_1$ ノ Basis ナル如クトル。L ヲ $K^*|K_1$ ノ Galois 体トスル。K^*, K_1, K_2 ノ Primdivisor ハスベテ L ノ Divisor ト見ラレルワケデアル。$K^*|K_1$ ノ Diskriminante $D_1=|S_1(w_i\ w_j)|\ (\neq 0)\in K_1$ ノ Zählerdivisor ヲ $\mathfrak{d}_1$ トスル。次ニ $w_i\ (i=1,2,\cdots\cdots,n)$ 及ビソノスベテノ K_1 ニ対スル共軛 $w_i^{(1)}=w_i, w_i^{(2)},\cdots\cdots,w_i^{(n)}$ ノ Nennerdivisor ノ積ヲ $\mathfrak{n}$ トスル。

シカルトキ $\mathfrak{p}^*\nmid\mathfrak{d}_1\mathfrak{n}$ ナル $\mathfrak{p}^*$ ニ関シテ(1)ガ成立スルコトガ云ヘレバ十分デアル。

$\mathfrak{p}^*\nmid\mathfrak{d}_1\mathfrak{n}$ ヲトリ、ソノ K_1 ニ対スル共軛 Divisor ヲ $\mathfrak{p}^{*(1)}=\mathfrak{p}^*, \mathfrak{p}^{*(2)},\cdots\cdots,\mathfrak{p}^{*(n)}$ トシ、コレラスベテニ関シテ ganz ナ K^* ノ元全体ノナス環ヲ $\mathfrak{O}^*$ トスル。

$\mathfrak{O}^*$ ノ任意ノ元 $z=\sum_i a_i w_i\ (a_i\in K_1)$ ト表ハス。シカラバ

$$\mathfrak{S}_1(z w_j)=\sum_i a_i\,\mathfrak{S}_1(w_i w_j)\quad (j=1,2\ \cdots,n)$$

ナル方程式ガ得ラレル。

$\mathfrak{p}^*\nmid\mathfrak{n}$ ダカラ w_i ノ共軛ハスベテ $\mathfrak{p}^*$-ganz 又 z ハ $\mathfrak{p}^*$ ノスベテ共軛ニ関シテ ganz 即チ z ノ共軛ハスベテ $\mathfrak{p}^*$-ganz ナル故、$\mathfrak{S}_1(z w_j), \mathfrak{S}_1(w_i w_j)$ ガス

べテ $\mathfrak{p}_1$-ganz デアルコトガ分ル。從ツテ上ノ方程式ヨリ $D_1 a_i$ ガ $\mathfrak{p}_1$-ganz トナルガ、更ニ $\mathfrak{p}^* \nmid D_1$ ナルコトカラ a_i ガ $\mathfrak{p}_1$-ganz デアルコトガ分ル。w_i ハ $\mathfrak{p}_2$-ganz デアリ、且ツ k ガ代数的閉体ダカラ

$$a_i \equiv \alpha_i \mod \mathfrak{p}_1, \qquad w_i \equiv \omega_i \mod \mathfrak{p}_2$$

ナル k ノ元 α_i, ω_i ガ存在スル故

$$z \equiv \sum_i \alpha_i \omega_i \qquad \mod (\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2).$$

即チ $\mathfrak{O}^*$ ノ元ハスベテ $\mathrm{mod}(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2)$ ニ関シテ k ノ元ト合同デアル、從ツテ $(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2)$ ハ K^* ニ於テ Primdivisor デナケレバナラナイガ $\mathfrak{p}^* | (\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2)$ デアルカラ結局(1)ガ成立ツ。

2. 以下 k ヲ vollkommen ナ体 $K, \overline{K}$ ヲ k ノ上ノ一変数ノ代数函数体デ而モ k ガ $K, \overline{K}$ ノ中デ代数的ニ閉ヂテヰルト假定スル。

シカラバ、$K, \overline{K}$ ノ Kompositum デ而モ k ノ上ノ二変数ノ代数函数体トナル体 $\mathfrak{K}$ ガ一意的[1](bis auf Isomorphie)ニ存在スルガ $K, \overline{K}$ ガ実際 $\mathfrak{K}$ ニ含マレテヰルト假定スル。ソノトキ $k, K, \overline{K}$ ガスベテ $\mathfrak{K}$ ニ於テ代数的ニ閉ヂテヰルコト[2]ガ容易ニ証明サレル。

---

(1)(2) ハ k ガ vollkommen トイフ假定カラ出ルヤウニ思ハレマス。

$\mathfrak{K}/\mathbf{K}$ ハ一変数代数函数体デアルガ、ソノ Prim-divisor ノ中 $K/\mathfrak{k}$ ニ於テ (trivial ナラザル) Prim-divisor ヲ引起スモノヲ konstante Primdivisor シカラザルモノヲ nicht-konstante Primdivisor ト呼ビマス。(167 頁 §2.)

nicht-konstante Primdivisor ハ即 $\mathfrak{K}/\mathbf{K}$ 及ビ $\mathfrak{K}/K$ ノ Primdivisor ト考ヘラレル Primdivisor デアリマスガ、コレニ関シ次ノ定理ガ成立チマス。

定理 <u>$K\mathbf{K}$ ハ $\mathfrak{K}$ ヲ商体トスル整域デ、ソコニ於テ gewöhnliche arithmetik ガ成立チ、ソノ Primideal 全体ト $\mathfrak{K}$ ノ nicht-konstante Prim-divisor 全体トガ一対一ニ対應スル。</u>

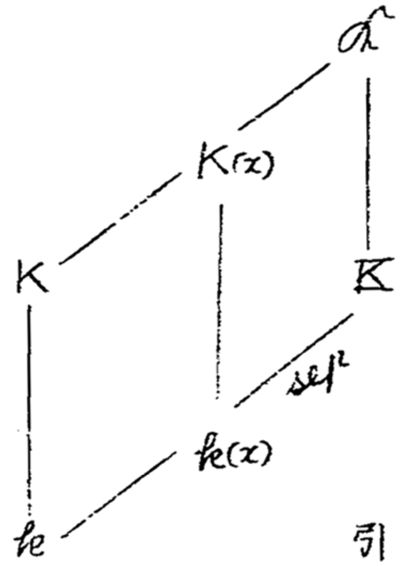
証明. $\mathfrak{k}$ ハ vollkommen ダカラ $\mathbf{K}/\mathfrak{k}(x)$ ガ separabel ナル如キ $\mathbf{K}$ ノ元 x ガ存在スルガ先ヅ $K, \mathfrak{k}(x)$ ニ関シテコノ定理ヲ証明スル。

K ト $\mathfrak{k}(x)$ ノ Kompositum ハ $K(x)$ デアルガ、$K(x)/K$ ノ Primdivisor ハヨク知ラレタヤウニ $K[x]$ ニ於イテ、ソノ既約多項式ニヨツテ定義サレルモノ及ビ $K[\frac{1}{x}]$ ニ於テ、ソノ既約多項式 $\frac{1}{x}$ ニヨリ定義サレルモノデ盡サレル。

シカルニ $\mathfrak{k}$ ハ K ニ於テ代数的ニ閉デテヰルノデアルカラ、$\mathfrak{k}[x]$ 及ビ $\mathfrak{k}[\frac{1}{x}]$ ノ既約多項式ハ $K[x]$, $K[\frac{1}{x}]$ ニ於テモ既約デアルコトヨリ $K(x)$ ノ nicht-konstante

Primdivisor トハ $k[x]$ ニ属シナイ $K[x]$ ノ既約多項式ニヨリ定義サレルモノ全体デアルコトガ分ル。

$K(x)$ ノ元 $\frac{F(x)}{G(x)}$,（$F(x), G(x) \in K[x]$）ヲ既約分数ノ形ニ表ハストキモシ $G(x)$ ノ素因子ノ中ニ $k[x]$ ニ属シナイモノガアレバソレニヨリ定義セラレル nicht-konstante Primdivisor ニ関スル $\frac{F(x)}{G(x)}$ ノ位数ハ負トナル故、スベテノ nicht-konstante Primdivisor ニ関シテ位数ガ 0 又ハ正ナル元全体ガ $K\cdot k(x)$ デアルコトガ分ル。$k[x]$ ニ於テ Arithmetik ガ成立ツカラソレヲ含ム $Kk(x)$ ニ於テモ成立ツ。



次ニ $K(x)$ カラ $\mathfrak{K}$ ヘ移ル $\mathbb{K}/k(x)$ ハ代数的ダカラ $\mathfrak{K}$ ノ Primdivisor ガ nicht-konstante デアルタメノ必要且ツ十分ナル条件ハソレガ $K(x)$ ニ於テ nicht-konstante Primdivisor ヲ引起スコトデアルカラ $\mathfrak{K}$ ノスベテノ nicht-konstante Primdivisor ニ関スル位数ガ正又ハ 0 ナル $\mathfrak{K}$ ノ元全体ガ、$\mathfrak{K}$ ノ $K k(x)$ ニ対スル Hauptordnung ト一致シ、従ツテソコニ於テ gewöhnliche Arithmetik ノ成立ツコトガ分ル。

従ツテ結局 $K\mathbb{K}$ ガ丁度 $Kk(x)$ ニ対スル Hauptordnung

ニナツテキルコトガイヘレバヨイガ、$K\mathbb{K}$ ノ元ガスベテ $K\cdot k(x)$ ニ対シテ ganz-abhängig 即 Hauptordnung ニ含マレルコトハ明カデアル。

$\mathbb{K}|k(x)$ ノ Basis ヲ w_i ($i=1,2,\cdots,n$) トスレバ Diskriminante $|S(w_i w_j)|$ ハ $\mathbb{K}|k(x)$ ガ separabel ダカラ、0 デナイ $k(x)$ ノ元デアルガ、w_i ガ又 $K\mathbb{K}$ ノ $K\cdot k(x)$ ニ対スル Minimalbasis ナルコトヨリ $|S(w_i w_j)|$ ハ又 $K\mathbb{K}$ ノ $K\cdot k(x)$ ニ対スル Diskriminante デアルコトガ分ルガ、$k(x)$ ノ $\neq 0$ ナル元ハ $K\cdot k(x)$ ノ Einheit ナル故, $K\mathbb{K}$ ガ Maximalordnung, 従ツテ Hauptordnung ナルコトガ分ル。（証終）

次ニ ξ ヲ k ニ属シナイ K ノ任意ノ元トシ、K ノ $k[\xi]$ ニ対スル Hauptordnung ヲ K_ξ, $\mathfrak{K}$ ノ $\mathbb{K}[\xi]$ ニ対スル Hauptordnung ヲ $\mathfrak{K}_\xi$ トスルトキ、例ヘバ、167 頁ノ Satz 1.2. ノ証明ニ必要トナル様ニ

$$\mathfrak{K}_\xi = K_\xi\cdot\mathbb{K}$$

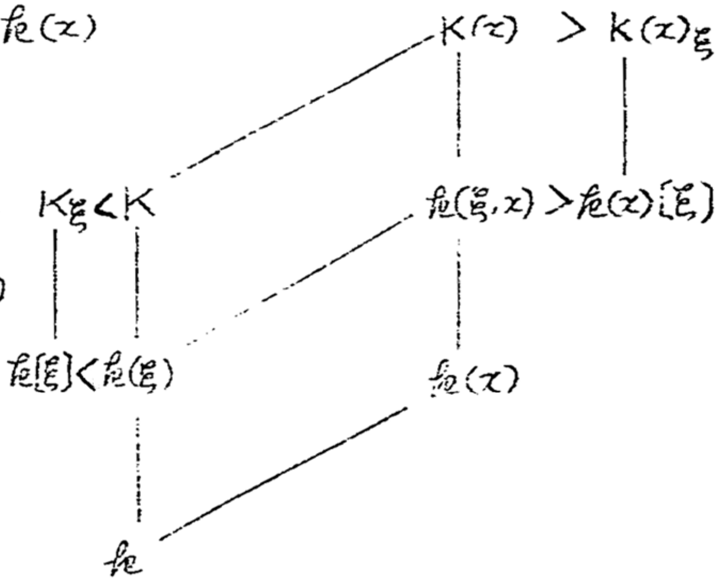
ガ成立ツコトヲ証明シマス。

ソノタメニ前ノヤウニ $\mathbb{K}|k(x)$ ガ separabel ナル如ク x ヲトツテ先ヅ K, $k(x)$ ニツイテ証明スル。

$K_\xi\cdot k(x)$ ノ元ハ $k(x[\xi]$ ニ対シテ ganz-abhängig ダカラ $K_\xi\cdot k(x)$ ガ全整閉（vollständig ganz-

abgeschlossen）ナルコトガイヘレバヨイ。$K\cdot k(x)$ ハ上ノ定理デ証明シタヤウニ

全整閉デ且ツ $K_\xi\cdot k(x)$ ヲ含ム故 $K\cdot k(x)$ ノ元 $\frac{F(x)}{f(x)}$，$(F(x)\in K[x]$, $f(x)\in k[x])$ $K_\xi\cdot k(x)$ ニ対シガ *fast ganz* 即チ



(2) $\quad \dfrac{G(x)}{g(x)}\left(\dfrac{F(x)}{f(x)}\right)^\nu \in K_\xi\cdot k(x)$, $\qquad (\nu=1.2.3\cdots\cdots)$

ナル $\dfrac{G(x)}{g(x)}\neq 0$ $(G(x)\in K_\xi[x]$, $g(x)\in k[x])$ ガ存在スルトキ、$\dfrac{F(x)}{f(x)}\in K_\xi\cdot k(x)$ デアルコトガイヘレバヨイ。

(2) ヨリ

$$G(x)(F(x))^\nu \in K_\xi\cdot k(x), \quad (\nu=1,2,3\cdots\cdots)$$

ガ得ラレルガ、$G(x)=b_0+b_1x+\cdots\cdots$ $F(x)=a_0+a_1x+\cdots\cdots$ トオクトキ $\frac{1}{x}\in K_\xi\cdot k(x)$ ダカラ $b_0\neq 0$ ト假定シテヨイ。

$$G(x)(F(x))^\nu=\frac{H_\nu(x)}{h_\nu(x)},$$

$$H_\nu(x)=C_0^{(\nu)}+C_1^{(\nu)}x+\cdots\cdots\in K_\xi[x]$$

$$h_\nu(x)=\gamma_0^{(\nu)}+\gamma_1^{(\nu)}x+\cdots\cdots\in k[x]$$

トオクトキ、$\gamma_0^{(\nu)} \neq 0$ ト假定シテヨイ。シカラバ

$$b_0 a_0^{\nu} = \frac{c_0^{(\nu)}}{\gamma_0^{(\nu)}} \in K_\xi \quad (\nu = 1, 2, \cdots\cdots)$$

ガ得ラレルガ、K_ξ ハ全整閉ダカラ、$a_0 \in K_\xi$ ナルコトガ分ル。

從ツテ $a_1 + a_2 x + \cdots\cdots = \frac{1}{x}(F(x) - a_0)$ ガ又 fast ganz ナルコトカラ、$a_1 \in K_\xi$ 同様ニ續ケテキッテ $F(x) \in K_\xi[x]$ ナルコトガ分ル。

$K(x)$ カラ $\mathfrak{K}$ ヘ移ルノハ前定理ト全ク同様ニシテ證明サレマスカラ省略シマス。